



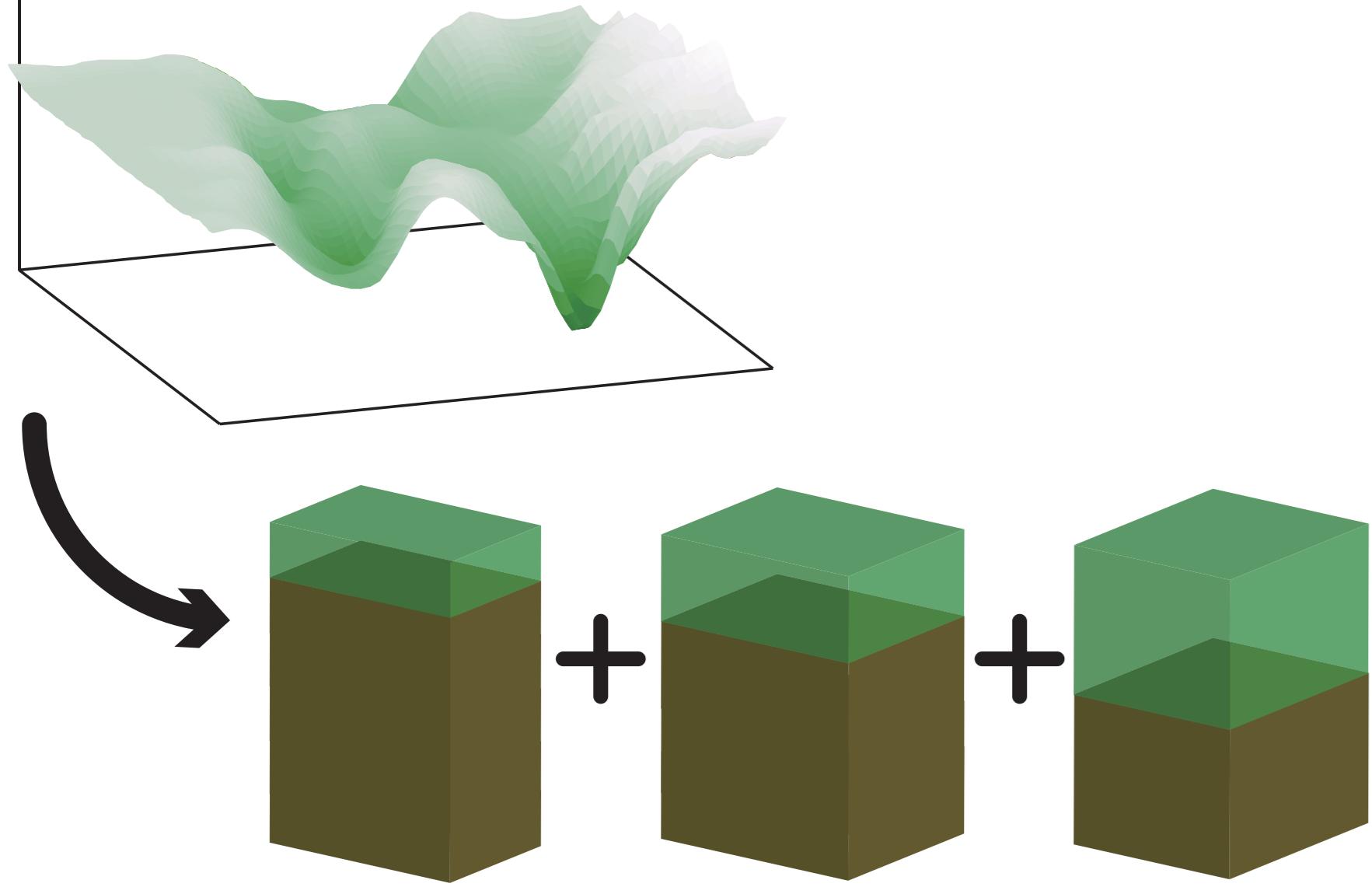
地盤伝達関数展開を利用した地盤増幅特性の分解法について

後藤浩之 (京都大学 防災研究所)

はじめに

地盤震動特性は地震ハザードを理解する上で重要な要素の1つである。従来、様々な方法で定量的にモデル化する試みがなされてきたが、広い範囲で面的に評価するためにはAVS30などの単純化された指標に頼らざるを得なかった。また、確率的に地盤増幅特性をえるためには、地盤増幅特性の主要な特徴をうまく取り込んでモデル化する必要がある。

本研究では、単純でありながらも物理的背景を持つような構造の重ね合わせによって複雑な地盤増幅特性を表現する手法を提案する。



2層系地盤伝達関数による級数展開

任意の L^2 関数 $f(\omega)$ ($\omega \in [0, \Omega]$) に対して次のような級数展開が一意に存在する。

$$f(\omega) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n a_n^*(\omega).$$

$a_n(\omega)$ は次のように定義される基底で、非減衰の表層と基盤とからなる2層系地盤伝達関数のスカラー倍に一致する。

$$a_n(\omega) \equiv \frac{\sqrt{r}}{\cos(2\pi n\omega/\Omega) + ir \sin(2\pi n\omega/\Omega)}.$$

(参考) 級数展開の存在に関する定理とその証明を下に掲載します。

級数展開を利用した地盤増幅の分解法

級数展開のパラメータ r , $\Omega (= md\Omega)$ は任意に与えることができるため、対象とする地盤増幅特性 $H_f(\omega)$ に近い基底 $h_f^m(r, \omega)$ を含むように定めることにする。ここでは、次の $J^m(r)$ を最小化する r と m を採用する。

$$J^m(r) \equiv \frac{\int_0^{\Omega'} |H_f(\omega) - h_f^m(r, \omega)|^2 d\omega}{\sqrt{\int_0^{\Omega'} |H_f(\omega)|^2 d\omega} \sqrt{\int_0^{\Omega'} |h_f^m(r, \omega)|^2 d\omega}},$$

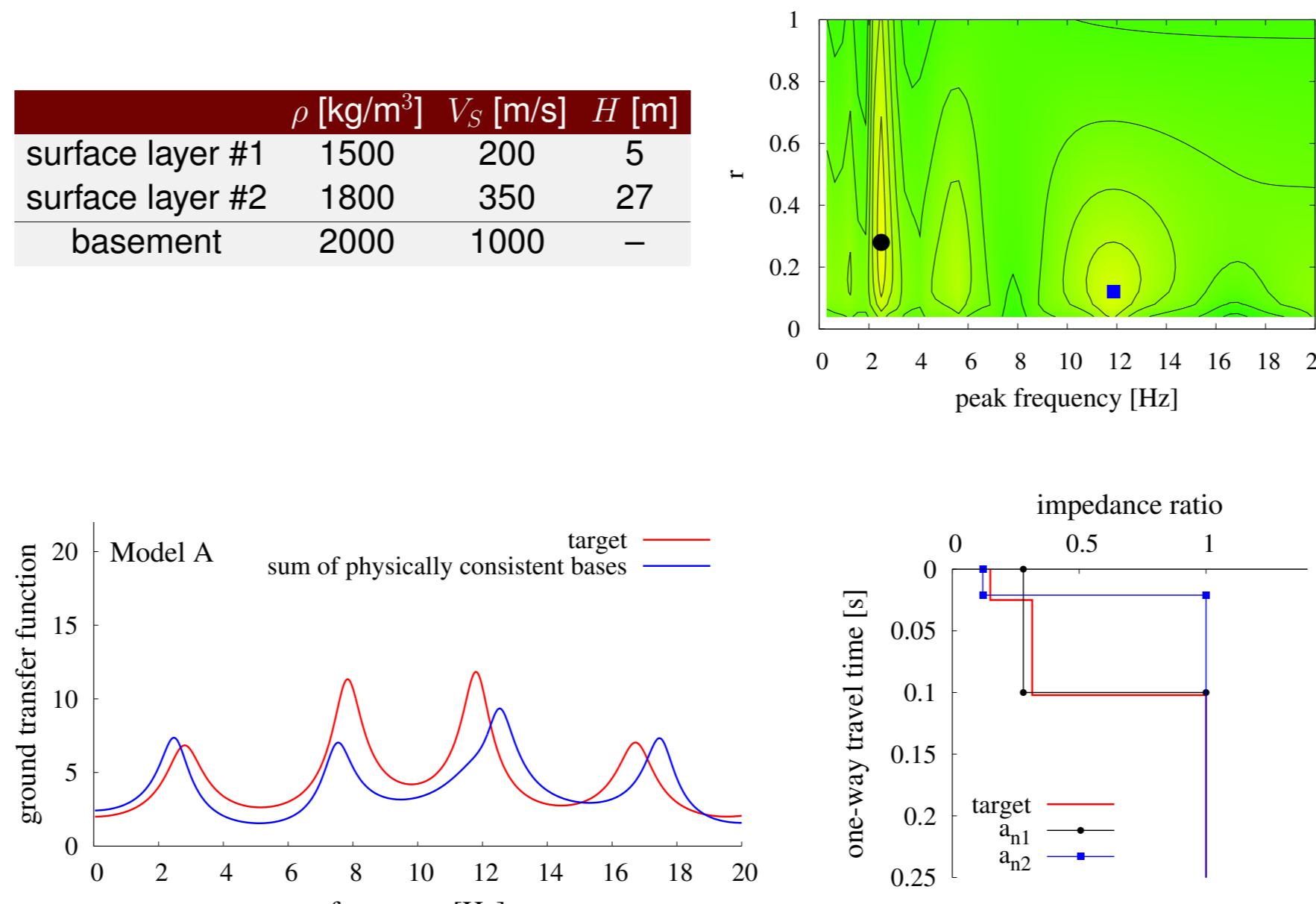
ただし、 $H_f(\omega)$ の定義域 $[0, \Omega']$ は別の制約によって定まることが多いため、関数形が不定となる範囲 $(\Omega', \Omega]$ を拘束するためのノルム最小化条件 (J_2) を加える。

$$J = J_1 + \varepsilon J_2 \longrightarrow \min.$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\Omega'} \int_0^{\Omega'} |H_f(\omega) - b_0 - \sum_{m=1}^n b_m a_m + \sum_{m=1}^n d_m a_m^*|^2 d\omega, \\ J_2 &= |b_0|^2 + \sum_{m=1}^n |b_m|^2 + \sum_{m=1}^n |d_m|^2 - \sum_{k=1}^K |b_{n_k}|^2. \end{aligned}$$

3層系の場合

3層系水平成層構造の伝達関数に対して $J^m(r)$ が極小を与える2項を含むように基底を構成し、伝達関数の分解を試みた。ターゲットの伝達関数と比較して、2つの基底の重み付き和はその特徴をある程度再現している。また、それぞれの基底に対応する構造は、元の3層系の構造との関連がみられる。



Definitions and Theorems

Definition 1. Ω is positive real. Let $a_n(r, \omega)$ be a function; $a_n : (0, \infty) \times [0, \Omega] \ni (r, \omega) \rightarrow \mathbb{C}$, such that

$$a_n(r, \omega) \equiv \frac{\sqrt{r}}{\cos(2\pi n\omega/\Omega) + ir \sin(2\pi n\omega/\Omega)} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (1)$$

Definition 2. $f \in L^2([0, \Omega], \omega/d\omega)$;

$$(f) \equiv \frac{1}{\Omega} \int_{[0, \Omega]} f d\omega. \quad (2)$$

Theorem 1. $\forall n \in \mathbb{N}: \|a_n\| = 1$.

Proof. $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\langle a_n \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_0^\Omega \frac{r}{\cos^2(2\pi n\omega/\Omega) + ir^2 \sin^2(2\pi n\omega/\Omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r}{\cos^2 \bar{\omega} + ir^2 \sin^2 \bar{\omega}} d\bar{\omega} = 1, \quad (3)$$

where $\bar{\omega} = 2\pi n\omega/\Omega$. Thus, $\|a_n\| = \sqrt{\langle a_n \rangle^2} = 1$. \square

Theorem 2. $\forall n \in \mathbb{N}: \langle a_n \rangle = 0$.

Proof. $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\langle a_n \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_0^\Omega \frac{r}{\cos^2(2\pi n\omega/\Omega) + ir^2 \sin^2(2\pi n\omega/\Omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{r}}{\cos \bar{\omega} + ir \sin \bar{\omega}} d\bar{\omega}. \quad (4)$$

For $r = 1$, $a_n = 0$. For $r \neq 1$, let z be a complex $e^{i\omega t}$ located on a unit circle C on the complex plane. The above integral is allowed to be a contour integral along C .

$$\langle a_n \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{2\sqrt{r}}{z^2 + 1/r} dz. \quad (5)$$

The poles of the integrand are located at $\pm \sqrt{1/r^2 + r}$ ($r < 1$) or $\pm \sqrt{r^2 - 1/r}$ ($r > 1$)。The residues corresponding to the poles have the same absolute value and opposite signs, so the integration vanishes. Thus, $\langle a_n \rangle = 0$. \square

Theorem 3. $\forall m, n \in \mathbb{N}: \langle a_m b_n \rangle = 0$ for $k+l = \text{odd}$, s.t. (k, l) are a coprime set of (m, n) .

Proof. $\forall n \in \mathbb{N}$, s.t. $m = pk$ and $n = pl$. Let z_p be a complex $e^{2\pi ip\omega/\Omega}$. $\langle a_m b_n \rangle$ is represented by a contour integral along the unit circle C , as follows:

4. $r_a \neq 1, r_b \neq 1$.

$$S(z_p) = \frac{\frac{4\sqrt{r_a r_b}}{(1-r_a)(1+r_a)}}{\left(\frac{2\sqrt{r_a}}{z_p} + \frac{1+r_a}{z_p}\right)^2} z_p^{k+l-1}. \quad (16)$$

The poles inside the unit circle C are located at $z_p = w_q^+$ or w_q^- defined by Eqs. (9)-(10). The residue corresponding to w_q^+ is

$$\text{Res}_{z_p=w_q^+}[S(z_p)] = -\frac{2\sqrt{r_a r_b}}{l(1-r_a)(1+r_b)} \frac{w_q^{k+l}}{w_q^2 + \frac{1+r_b}{r_b}}. \quad (17)$$

$\forall q \in \{1, \dots, l\}$; $w_q^{\pm k} = w_q^{\pm 2k}$. For $k+l = \text{odd}$, the sum of the residues corresponding to $w_q^{\pm k}$ and $w_{q+l}^{\pm k}$ vanishes. Thus, $\langle a_m b_n \rangle = 0$ for $k+l = \text{odd}$, and

$$\langle a_m b_n \rangle = -\frac{4\sqrt{r_a r_b}}{l(1-r_a)} \sum_{q=1}^l \frac{w_q^{k+l}}{(1-r_a)w_q^2 + 1+r_a}. \quad (18)$$

for $k+l = \text{even}$.

From the results in all the cases 1-4, $\langle a_m b_n \rangle = 0$ for $k+l = \text{odd}$. \square

Theorem 4. $\forall m, n \in \mathbb{N}: \langle a_m b_n \rangle = 0$ for $k+l = \text{odd}$, s.t. (k, l) are a coprime set of (m, n) .

Proof. $\exists p \in \mathbb{N}$, s.t. $m = pk$ and $n = pl$. Let z_p be a complex $e^{2\pi ip\omega/\Omega}$. $\langle a_m b_n \rangle$ is represented by a contour integral along the unit circle C , as follows:

$$\langle a_m b_n \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{2\sqrt{r_a}}{(1+r_a)z_p^k + (1-r_a)z_p^{-k}} \frac{2\sqrt{r_b}}{(1+r_b)z_p^l + (1-r_b)z_p^{-l}} dz_p. \quad (19)$$

Let $S(z_p)$ be an integrand of Eq. (19).

1. $r_a = r_b = 1$.

$$S(z_p) = z_p^{k+l-1}. \quad (20)$$

The order of the pole is larger than 1. Thus, $\langle a_m b_n \rangle = 0$ for all k, l .

2. $r_a = 1, r_b \neq 1$.

$$S(z_p) = \frac{2\sqrt{r_b}}{\frac{2\sqrt{r_b}}{z_p} + \frac{1+r_b}{z_p}} z_p^{k+l-1}. \quad (21)$$

The following power series converges because of $|1 - r_b| < 1$:

$$S(z_p) = \frac{2\sqrt{r_b}}{1+r_b} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{r_b - 1}{1+r_b} \right)^q z_p^{k+(2q+1)y-1}. \quad (22)$$

For all k, l , the residue is 0. Thus, $\langle a_m b_n \rangle = 0$ for all k, l .

3. $r_a \neq 1, r_b = 1$.

$$S(z_p) = \frac{2\sqrt{r_a}}{\frac{1+r_a}{z_p} + \frac{1+r_a}{z_p}} z_p^{k+l-1}. \quad (23)$$

The above representation is identical to Eq. (21). Thus, $\langle a_m b_n \rangle = 0$ for all k, l .

4. $r_a \neq 1, r_b \neq 1$.

$$S(z_p) = \frac{\frac{4\sqrt{r_a r_b}}{(1+r_a)(1+r_b)}}{\left(\frac{2\sqrt{r_a}}{z_p} + \frac{1+r_a}{z_p}\right)^2 \left(\frac{2\sqrt{r_b}}{z_p} + \frac{1+r_b}{z_p}\right)^2} z_p^{k+l-1}. \quad (24)$$

Poles are located at $z_p = w_q^+$ or w_q^- , and $z_p = w_{q+k}^+$ or w_{q+k}^- such that

$$w_q^{\pm k} = \left(\frac{r_a - 1}{1+r_a} \right)^{1/2k} e^{\mp i\omega_q k / \Omega} \text{ for } r_a > 1, \quad (25)$$

$$w_{q+k}^{\pm k} = \left(\frac{r_a - 1}{1+r_a} \right)^{1/2(k+l)} e^{\mp i\omega_{q+k} (k+l)/\Omega} \text{ for } r_a < 1, \quad (26)$$

$$w_q^{\pm k} = \left(\frac{r_b - 1}{1+r_b} \right)^{1/2k} e^{\mp i\omega_b k / \Omega} \text{ for } r_b > 1, \quad (27)$$

$$w_{q+k}^{\pm k} = \left(\frac{r_b - 1}{1+r_b} \right)^{1/2(k+l)} e^{\mp i\omega_{q+k} (k+l)/\Omega} \text{ for } r_b < 1. \quad (28)$$

where $\omega_q \in \{1, \dots, 2k\}$, $\omega_b \in \{1, \dots, 2l\}$. $\omega_q \in \{1, \dots, k\}$; $w_{q+k}^{\pm k} = -w_{q-k}^{\pm k}$, $\omega_b \in \{1, \dots, l\}$; $w_{q+k}^{\pm k} = -w_{q-k}^{\pm k}$. The residues corresponding to $w_q^{\pm k}$ and $w_{q+k}^{\pm k}$ are represented as follows,

$$\text{Res}_{z_p=w_q^{\pm k}}[S(z_p)] = -\frac{\sqrt{r_a r_b}}{l(1-r_b)} w_q^{\pm k+l}. \quad (11)$$

For $k+l = \text{odd}$, the sum of the residues corresponding to $w_q^{\pm k}$ and $w_{q+k}^{\pm k}$ vanishes. Thus, $\langle a_m b_n \rangle = 0$ for $k+l = \text{odd}$, and $\langle a_m b_n \rangle = -2\sqrt{r_a r_b}/l(1-r_b) \sum_{q=1}^k w_q^{\pm k+l}$ for $k+l = \text{even}$. The sum is non-zero only for the case $(k, l) = (2s-1, 1)$ for all $s \in \mathbb{N}$, and then

$$\langle a_m b_n \rangle = -\frac{2\sqrt{r_a r_b}}{l(1-r_b)} \left(\frac{r_b - 1}{1+r_b} \right)^s. \quad (12)$$

$r_a \neq 1, r_b \neq 1$.

$$S(z_p) = \frac{2\sqrt{r_a}}{z_p^2 + \frac{1+r_a}{r_a}} z_p^{k+l-1}. \quad (13)$$

The poles inside the unit circle C are located at $z_p = 0$ for $k+l < l$. The following power series converges because of $|1 - r_a| < 1$.

$$z_p^{k+l-1} S(z_p) = \frac{2\sqrt{r_a}}{1+r_a} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{r_a - 1}{1+r_a} \right)^q z_p^{2q}. \quad (14)$$

The $(l-k)$ th order differential of $z_p^{k+l-1} S(z_p)$ is derived, as follows:

$$\frac{d^{l-k}}{dz_p^{l-k}} [z_p^{k+l-1} S(z_p)] = \frac{2\sqrt{r_a}}{1+r_a} \sum_{q>(l-k)/2k}^{\infty} \frac{(2kq)!}{(2kq+k-l)!} \left(\frac{r_a - 1}{1+r_a} \right)^q z_p^{2kq+k-l}. \quad (15)$$

Then, residue of $S(z_p)$ is nonzero only for the case $(l-k)/2k \in \mathbb{N} + 0$. That is $l = (2s-1)k$ for all $s \in \mathbb{N}$. Thus, $\langle a_m b_n \rangle = 2(l-1)/2k \cdot (1/r_a)(r_a - 1/1+r_a)^{l-1/2}$ only for $(k, l) = (1, 2s-1)$ ($s \in \mathbb{N}$), and $\langle a_m b_n \rangle = 0$ for the other cases.

ランダムに生成した多層系の場合

ランダムに生成した6層系の伝達関数について同様の手法で分解を試みた。再表層と基盤の物性は固定し、中間層の物性をランダムに与えた100モデルについて検討する。分解に用いた基底は、中間層が全て再表層と同じ物性であった場合（赤モード）と中間層が全て基盤と同じ物性であった場合（青モード）とし、その2つの基底を含む級数によって元の伝達関数を表現する。

| | < |
| --- | --- |