断層変位と表現定理

京都大学防災研究所　後藤　浩之

1　相反定理

弾性体 V 内では以下の運動方程式，構成式，適合条件式が満足されるとする．

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + f_i, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right). \tag{3}$$

ここで，u_i は変位，σ_{ij} は応力，f_i は体積力，ε_{ij} はひずみ，C_{ijkl} は弾性定数を表す．また，$\ddot{}$ は時間方向の 2 階微分を，$_{,j}$ は空間 j 方向への 1 階微分を表す．式 (1)-(3) は変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ と応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ の関係を表していることから，応力は $\boldsymbol{u}$ の関数であるとして $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})$ と表すこともある．

同様に，同じ媒質内に異なる体積力 g_i を加えたことにより V 内に生じる変位を v_i と記述すると，v_i，$\sigma_{ij}(\boldsymbol{v})$ は式 (1)-(3) を満たす．

式 (1) の両辺に対し v_i と畳み込み積分[1]をした上で全ての成分の和を取り[2]，領域積分すると次式を得る．

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{t}\int_V \rho\ddot{u}_i(\boldsymbol{x},\tau)v_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t}\int_V \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}),\tau)v_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau + \int_{-\infty}^{t}\int_V f_i(\boldsymbol{x},\tau)v_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau.\end{aligned} \tag{4}$$

同様に，v_i に対して満たされている式 (1) に u_i を作用した場合は次式を得る．

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{t}\int_V \rho\ddot{v}_i(\boldsymbol{x},\tau)u_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t}\int_V \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}),\tau)u_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau + \int_{-\infty}^{t}\int_V g_i(\boldsymbol{x},\tau)u_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau.\end{aligned} \tag{5}$$

ここで，式 (4)，(5) 左辺の畳み込み積分を部分積分により次式のように変形する．

$$\int_{-\infty}^{t}\ddot{u}_i(\tau)v_i(t-\tau)d\tau = \left[\dot{u}_i(\tau)v_i(t-\tau)\right]_{-\infty}^{t} - \int_{-\infty}^{t}\dot{u}_i(\tau)\dot{v}_i(t-\tau)d\tau, \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{t}\ddot{v}_i(\tau)u_i(t-\tau)d\tau = \left[\dot{v}_i(\tau)u_i(t-\tau)\right]_{-\infty}^{t} - \int_{-\infty}^{t}\dot{v}_i(\tau)\dot{u}_i(t-\tau)d\tau. \tag{7}$$

$t \leq 0$ において変位と速度が発生していない（$u_i(t) = \dot{u}_i(t) = v_i(t) = \dot{v}_i(t) = 0$）とすれば，式 (6)，(7) の右辺第一項が 0 であり，式 (4)，(5) の左辺が互いに等しくなる．すなわち，式 (4)，(5) の右辺が等しい条件から次式が導かれる．

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{t}\int_V \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}),\tau)v_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau + \int_{-\infty}^{t}\int_V f_i(\boldsymbol{x},\tau)v_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t}\int_V \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}),\tau)u_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau + \int_{-\infty}^{t}\int_V g_i(\boldsymbol{x},\tau)u_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau.\end{aligned} \tag{8}$$

式 (8) の右辺第一項にガウスの発散定理[3]を用いて，領域 V に関する体積積分を V の境界面 S に関する面積積分に変換する．

$$\begin{aligned}\int_V \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))v_i(\boldsymbol{x})dV(\boldsymbol{x}) &= \int_V \left(\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))v_i(\boldsymbol{x})\right)_{,j}dV(\boldsymbol{x}) - \int_V \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))v_{i,j}(\boldsymbol{x})dV(\boldsymbol{x}) \\ &= \int_S \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))v_i(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x}) - \int_V u_{k,l}(\boldsymbol{x})C_{ijkl}(\boldsymbol{x})v_{i,j}(\boldsymbol{x})dV(\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{9}$$

[1] 畳み込み積分：$\int_{-\infty}^{t} a(\tau)b(t-\tau)d\tau$
[2] 総和規約：$a_ib_i \equiv a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
[3] ガウスの発散定理：$\int_V a_{i,i}dV = \int_S a_in_idS \quad (S = \partial V)$

ここで，n_j は境界面の外向き法線ベクトルの成分を表す．同様に，式 (8) 右辺第一項を計算すると次式を得る．

$$\int_V \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))u_i(\boldsymbol{x})dV(\boldsymbol{x}) = \int_S \sigma_{ij}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))u_i(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x}) - \int_V v_{k,l}(\boldsymbol{x})C_{ijkl}(\boldsymbol{x})u_{i,j}(\boldsymbol{x})dV(\boldsymbol{x}). \tag{10}$$

弾性定数の性質 $C_{ijkl} = C_{klij}$[4]により式 (9)，(10) の右辺第二項がそれぞれ等しいため，式 (8) への代入によりこの項は消える．式 (9)，(10) を式 (8) に代入すると次式，Betty の相反定理が得られる．

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{t}\int_S \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}),\tau)v_i(\boldsymbol{x},t-\tau)n_j(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x})d\tau + \int_{-\infty}^{t}\int_V f_i(\boldsymbol{x},\tau)v_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t}\int_S \sigma_{ij}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}),\tau)u_i(\boldsymbol{x},t-\tau)n_j(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x})d\tau + \int_{-\infty}^{t}\int_V g_i(\boldsymbol{x},\tau)u_i(\boldsymbol{x},t-\tau)dV(\boldsymbol{x})d\tau. \qquad (11)
\end{aligned}$$

2　表現定理

弾性体 V 内の一点一方向にインパルスを与えた時に生じる変位を，その問題のグリーン関数として $G_{in}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ と記述する．ここで，$\boldsymbol{\xi}$，τ，n はそれぞれインパルスを与える点，時刻，成分を表す．

前章の変位 v_i は任意の外力に対する変位を用いることが可能なので，インパルスを外力とするグリーン関数を変位としても構わない．すなわち，v_i，$\sigma_{ij}(\boldsymbol{v})$，$g_i$ を次式で置き換える．

$$v_i(\boldsymbol{x},t) = G_{in}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},t_s), \tag{12}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}),t) = C_{ijkl}G_{kn,l}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},t_s), \tag{13}$$

$$g_i(\boldsymbol{x},t) = \delta_{in}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-t_s). \tag{14}$$

ここで，δ_{in} は Kronecker のデルタ，$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ は Dirac のデルタ関数を表す．式 (12)-(14) を式 (11) に代入すると次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{t}\int_S \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}),\tau)G_{in}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi},t_s)n_j(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x})d\tau + \int_{-\infty}^{t}\int_V f_i(\boldsymbol{x},\tau)G_{in}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi},t_s)dV(\boldsymbol{x})d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t}\int_S C_{ijkl}G_{kn,l}(\boldsymbol{x},\tau;\boldsymbol{\xi},t_s)u_i(\boldsymbol{x},t-\tau)n_j(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x})d\tau + u_n(\boldsymbol{\xi},t_s). \qquad (15)
\end{aligned}$$

式 (15) を整理して，

$$\begin{aligned}
u_n(\boldsymbol{\xi},t_s) = &\int_{-\infty}^{t}\int_V f_i(\boldsymbol{x},\tau)G_{in}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi},t_s)dV(\boldsymbol{x})d\tau \\
&+ \int_{-\infty}^{t}\int_S \sigma_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)G_{in}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi},t_s)n_j(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x})d\tau \\
&- \int_{-\infty}^{t}\int_S C_{ijkl}G_{kn,l}(\boldsymbol{x},\tau;\boldsymbol{\xi},t_s)u_i(\boldsymbol{x},t-\tau)n_j(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x})d\tau, \qquad (16)
\end{aligned}$$

を得る．さらに，グリーン関数の相反性，$G_{in}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},t_s) = G_{ni}(\boldsymbol{\xi},t;\boldsymbol{x},t_s)$ を用い，さらに記号 $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{\xi}$ に，記号 $\boldsymbol{\xi}$ を $\boldsymbol{x}$ に，記号 t_s を t に交換して変形すると次式の積分方程式を得る．

$$\begin{aligned}
u_n(\boldsymbol{x},t) = &\int_{-\infty}^{t}\int_V f_i(\boldsymbol{\xi},\tau)G_{ni}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)dV(\boldsymbol{\xi})d\tau \\
&+ \int_{-\infty}^{t}\int_S \sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi},\tau)G_{ni}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)n_j(\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi})d\tau \\
&- \int_{-\infty}^{t}\int_S C_{ijkl}G_{nk,l}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)u_i(\boldsymbol{\xi},\tau)n_j(\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi})d\tau. \qquad (17)
\end{aligned}$$

[4]弾性定数の性質 $C_{ijkl} = C_{klij}$：弾性エネルギーの保存則から導かれる

ところで，弾性体 V 内に断層 Σ が含まれている問題を考える．この V の境界面は自由表面 S_0 と Σ のみで構成されるとする．また，V 内に外力が働いていないものとする．この条件下で式 (17) は次式となる．

$$
\begin{aligned}
u_n(\boldsymbol{x},t) = & \int_{-\infty}^{t}\int_{S_0+\Sigma^{+}+\Sigma^{-}} \sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi},\tau)G_{ni}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)n_j(\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi})d\tau \\
& - \int_{-\infty}^{t}\int_{S_0+\Sigma^{+}+\Sigma^{-}} C_{ijkl}G_{nk,l}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)u_i(\boldsymbol{\xi},\tau)n_j(\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi})d\tau. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

S_0 上では表面力 $\sigma_{ij}n_j = 0$ であり，また設定するグリーン関数も S_0 上で $C_{ijkl}G_{nk,l}n_j = 0$ を満たすとすれば，S_0 上での面積積分の項が消える．また，Σ^+，Σ^- は向かい合う断層面を表しており，それぞれの法線方向成分を n_j^+，n_j^- とすれば $n_j^+ = -n_j^-$ が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
u_n(\boldsymbol{x},t) = & \int_{-\infty}^{t}\int_{\Sigma^{+}} (\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi},\tau)^{+} - \sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi},\tau)^{-})G_{ni}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)n_j(\boldsymbol{\xi})^{+}dS(\boldsymbol{\xi})d\tau \\
& - \int_{-\infty}^{t}\int_{\Sigma^{+}} (u_i(\boldsymbol{\xi},\tau)^{+} - u_i(\boldsymbol{\xi},\tau)^{-})C_{ijkl}G_{nk,l}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)n_j(\boldsymbol{\xi})^{+}dS(\boldsymbol{\xi})d\tau. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

ここで，$^+$ は Σ^+ 上の物理変数を，$^-$ は Σ^- 上の物理変数を表している．断層面を挟んで応力が連続であれば，式 (19) の右辺第一項が消えて次式の表現定理が導かれる．

$$
u_n(\boldsymbol{x},t) = -\int_{-\infty}^{t}\int_{\Sigma^{+}} \Delta u_i(\boldsymbol{\xi},\tau)C_{ijkl}G_{nk,l}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)n_j(\boldsymbol{\xi})^{+}dS(\boldsymbol{\xi})d\tau. \qquad (20)
$$

ここで，Δu は $\Delta u \equiv u^+ - u^-$ で定義される滑り変位．また，$\boldsymbol{n}^+$ は V 内から断層方向への法線ベクトルなので，一般に V 内方向の法線ベクトル $\boldsymbol{n}^- = -\boldsymbol{n}^+$ を用いて表現定理を記述する．

$$
u_n(\boldsymbol{x},t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{\Sigma^{+}} \Delta u_i(\boldsymbol{\xi},\tau)C_{ijkl}G_{nk,l}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)n_j(\boldsymbol{\xi})^{-}dS(\boldsymbol{\xi})d\tau. \qquad (21)
$$